

нелинейной системы. Более простые аппроксимации используются для анализа свойств модели, более сложные — служат для построения программ управления, которые могут использоваться в качестве начального приближения в алгоритмах улучшения.

Алгоритмы МНК и построения полной нелинейной модели и линейной модели реализованы средствами программ символьных вычислений. В дальнейшем планируется перенос этих алгоритмов на параллельную архитектуру. Также на основе полученной линейной модели будет решена задача определения границ опасной зоны посадки вертолета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.
2. Ухин М.Ю. Приближенный синтез оптимального управления. М.: Физматлит, 2006.

Блинов Александр Олегович
Институт Программных Систем
Российской академии наук
Россия, Переславль-Залесский
e-mail: sarmat@pereslavl.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ¹

© А. И. Булгаков, А. И. Коробко, О. В. Филиппова

В докладе рассматривается функционально-дифференциальное включение с импульсными воздействиями в конечном числе фиксированных точек. Изучаются свойства решений таких включений. Отметим, что дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями были исследованы в монографиях [1–3].

Пусть $\mathcal{U} \subset [a, b]$ измеримое по Лебегу множество $\mu(\mathcal{U}) > 0$, где μ — мера Лебега. Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых функций $z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |z(s)| ds$; $\rho_{L^n(\mathcal{U})}[\cdot, \cdot]$, $h_{L^n(\mathcal{U})}[\cdot, \cdot]$ — расстояние от точки до множества и расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве суммируемых функций, соответственно; $L_+^1(\mathcal{U})$ — множество неотрицательных функций пространства $L^1(\mathcal{U})$. Пусть $M \subset L^n(\mathcal{U})$. Обозначим $\overline{\text{co}} M$ выпуклую замкнутую оболочку множества M , а через $\overline{\text{ext}}(\overline{\text{co}} M)$ замыкание множеств крайних точек выпуклой оболочки $\overline{\text{co}} M$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-01-00305) и темплана №1.6.07.

Будем говорить, что множество $\Phi \subset L^n[a, b]$ *выпукло по переключению (разложимо)*, если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ выполняется включение $\chi(e)x + \chi([a, b] \setminus e)y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующих множеств. Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a, b]$ обозначим через $\mathbf{S}(L^n[a, b])$. Через $\Omega(\mathbf{S}(L^n[a, b]))$ обозначим множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a, b]$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$, $\tilde{C}_+^1[a, b]$ — множество неотрицательных функций пространства $\tilde{C}^1[a, b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \quad (1)$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x(a) = x_0, \quad (3)$$

где отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ полунепрерывно снизу и для каждого ограниченного множества $\mathbf{U} \subset \tilde{C}^n[a, b]$ образ $\Phi(\mathbf{U})$ ограничен суммируемой функцией, отображения $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \tilde{C}^n[a, b]$, для которой существует отображение $q \in \Phi(x)$, что функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = \int_a^t q(s)ds + x_0 + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, b]}(t) \Delta x(t_k), \quad (4)$$

где $\Delta x(t_k)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяют равенствам (2).

В докладе для задачи (1)–(3) с вольтерровым по А.Н. Тихонову отображением $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ обсуждаются вопросы о локальной разрешимости, продолжаемости решений, и изучаются некоторые их свойства.

Далее приведем некоторые результаты.

Пусть $H(x_0, \tau)$ — множество всех решений задачи (1)–(3) на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$).

Будем говорить, что множество всех локальных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует решения $y \in H(x_0, \tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > r$.

Будем говорить, что множество решений задачи (1)–(3) почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений, если для любого $v \in L_1^n[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x \in \tilde{C}^n[a, b]$ задачи (1)–(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{L^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon \mu(\mathcal{U}), \quad (5)$$

где функция $q \in \Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4). Если неравенство (5) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество решений задачи (1)–(3) реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.

Т е о р е м а 1. Пусть множество всех локальных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено. И пусть отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множество решений задачи (1)–(3) почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если

$\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \Omega(\mathbf{S}[L^n[a, b]])$, то множество решений задачи (1)–(3) реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.

Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, обладают свойством A , если для каждого $k = 1, 2, \dots, m$, найдется непрерывная функция $\tilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, удовлетворяющая равенству $\tilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq \tilde{I}_k(|x - y|). \quad (6)$$

Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, и отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}[L^n[a, b]]$ обладают свойством $(\Gamma^{u, \varepsilon, p}; \tilde{I}_k, k = 1, 2, \dots, m)$, если импульсные воздействия I_k , $k = 1, 2, \dots, m$, обладают свойством A и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \tilde{C}_+^1[a, b] \rightarrow L_+^1[a, b]$, удовлетворяющий условиям: $\Gamma(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \tilde{C}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leq \|\Gamma(Z(x - y))\|_{L^1(\mathcal{U})};$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \tilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad y(a) = p \quad (7)$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \tilde{C}_+^1[a, b]$ определено равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$, отображение $\tilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, $k = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяет неравенству (6), $u \in L_+^1[a, b]$, числа $\varepsilon, p \geq 0$.

Пусть для функции $y \in \tilde{C}^n[a, b]$ существует функция $\tilde{q} \in L^n[a, b]$, что для любого $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$y(t) = \int_a^t \tilde{q}(s) ds + y(a) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, b]}(t) \Delta y(t_k), \quad (8)$$

где $\Delta y(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$ удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in L_+^1[a, b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ справедливо соотношение

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[\tilde{q}, \Phi(y)] \leq \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s) ds, \quad (9)$$

где функции $\tilde{q} \in L^n[a, b]$ и $y \in \tilde{C}^n[a, b]$ удовлетворяют равенству (8).

Т е о р е м а 2. Пусть для функции $y \in \tilde{C}^n[a, b]$ имеет место представление (8) и функция $\varkappa \in L_+^1[a, b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет неравенству (9). Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, и отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}[L^n[a, b]]$ обладают свойством $(\Gamma^{u, \varepsilon, p}; \tilde{I}_k, k = 1, 2, \dots, m)$, где $\varepsilon \geq 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 — начальное условие задачи (1)–(3). Тогда для любого решения $x \in \tilde{C}^n[a, b]$ задачи (1)–(3), удовлетворяющего для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ неравенству (5), в котором функция $q \in L^n[a, b]$ из представления (4), а функция $v = \tilde{q}$ из соотношения (8), при любом $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t) \quad (10)$$

и при почти всех $t \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \tilde{q}(t)| \leq \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa, \varepsilon, p)))(t), \quad (11)$$

где $\xi(\kappa, \varepsilon, p) \in \tilde{C}_+^1[a, b]$ — верхнее решение задачи (7) при $u = \kappa$ и $p = |x_0 - y(a)|$.

Из теорем 1, 2 вытекает

Т е о р е м а 3. Пусть для функции $y \in \tilde{C}^n[a, b]$ имеет место представление (8) и функция $\kappa \in L_+^1[a, b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет неравенству (9). Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, и отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ обладают свойством $(\Gamma^{\kappa, \varepsilon, p}; \tilde{I}_k, k = 1, 2, \dots, m)$, где $\varepsilon \geq 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 — начальное условие задачи (1)–(3) и множество всех локальных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено. Тогда при $\varepsilon > 0$ существует решение $x \in C^n[a, b]$ задачи (1)–(3), для которого при всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка (10) и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется соотношение (11).

Если $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \Omega(\mathbf{S}(L^n[a, b]))$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Будем говорить, что функция $y \in C^n[a, b]$, имеющая представление (8), в котором $y(a) = x_0$, является квазирешением задачи (1)–(3), если найдется такая последовательность $x_i \in \tilde{C}^n[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$, что для каждой функции x_i , $i = 1, 2, \dots$, найдется функция $q_i \in \Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a, b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = \int_a^t q_i(s) ds + x_0 + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, b]}(t) \Delta x_i(t_k),$$

где $\Delta x_i(t_k)$ удовлетворяет равенству (2), и $x_i \rightarrow y$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$. Пусть $\mathcal{H}(x_0)$ — множество всех квазирешений задачи (1)–(3).

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}} \Phi(x), \quad \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad x(a) = x_0. \quad (12)$$

Пусть $H_{\text{co}}(x_0, \tau)$ — множество всех решений задачи (12) на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$).

Т е о р е м а 4. Справедливо равенство $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0, b)$.

Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, и отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ обладают свойством В, если выполняется свойство $(\Gamma^{0,0,0}; \tilde{I}_k, k = 1, 2, \dots, m)$, а задача $\dot{y} = \Gamma(y)$, $y(a) = 0$ на каждом отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$) имеет только нулевое решение.

Т е о р е м а 5. Пусть множество всех локальных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено. Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, и отображение $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{S}(L^n[a, b])$ обладают свойством В. Тогда $H(x_0, b) \neq \emptyset$ и справедливо равенство

$$\overline{H(x_0, b)} = H_{\text{co}}(x_0, b), \quad (13)$$

где $\overline{H(x_0, b)}$ — замыкание множества $H(x_0, b)$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$.

Таким образом теорема 5 дает достаточные условия выполнения принципа плотности (см. [4]) для задачи (1)–(3). Равенство (13) можно усилить следующим образом.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \overline{\text{ext}}(\overline{\text{co}} \Phi(x)), \quad \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad x(a) = x_0. \quad (14)$$

Пусть $H_{\text{ext}}(x_0, \tau)$ — множество всех решений задачи (14) на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$).

Т е о р е м а 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда $H_{\text{ext}}(x_0, b) \neq \emptyset$ и справедливо равенство

$$\overline{H_{\text{ext}}(x_0, b)} = \overline{H(x_0, b)} = H_{\text{co}}(x_0, b),$$

где $\overline{H_{\text{ext}}(x_0, b)}$, $\overline{H(x_0, b)}$ — замыкание множеств $H_{\text{ext}}(x_0, b)$, $H(x_0, b)$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$, соответственно.

Таким образом, для задачи (1)–(3) выполняется не только принцип плотности, но и бэнг-бэнг принцип.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. М.: Высшая школа, 1987.
2. *Завалишин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Разматуллина Л.Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.
4. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Григоренко А.А.* К теории возмущенных включений и ее приложения // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 10. С. 21–78.

Булгаков Александр Иванович
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Коробко Анатолий Иванович
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: prof13@yandex.ru

Филиппова Ольга Викторовна
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ¹

© А. И. Булгаков, А. Н. Мачина

Для формулировки основных результатов приведем некоторые обозначения и определения. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторая система подмножеств пространства X . Обозначим через $\Omega(\mathcal{P})$ множество всех непустых выпуклых подмножеств пространства X , принадлежащих системе $\mathcal{P}$.

Пусть $\Phi \subset L_1^n[a, b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (разложимо), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x + \chi([a, b] \setminus \mathcal{U})y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\Pi[L_1^n[a, b]]$ ($Q[L_1^n[a, b]]$) множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемых функциями) подмножеств пространства $L_1^n[a, b]$.

Пусть $F : [a, b] \rightarrow \text{comp}[R^n]$ измеримое отображение. Обозначим $S(F) = \{y \in L^n[a, b] : y(t) \in F(t) \text{ при п.в. } t \in [a, b]\}$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00305), темплана № 1.6.07 и Государственного образовательного фонда Норвегии.